10.05.16

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$, υποσυνόλων $F_i \subseteq (E,\rho)$ θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad\quad \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq \varphi$

$\forall i_1, i_2, \dots, i_n \in E$

ΘΕΩΡΗΜΑ (E,ρ) συμπαγής αν-ν $\forall (F_i)_{i\in I}$ κλειστών $\subseteq E$ με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (1) ισχύει ότι $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varphi$

Απόδειξη

"$\Longrightarrow$" Έστω (E,ρ) συμπαγής $(F_i)_{i\in I}$, και (1)

Θ.δ.ο. $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varphi$

Ας υποθέσαμε ότι $\bigcap_{i\in I} F_i = \varphi \Rightarrow \varphi^c = \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c$

F_i κλειστά $\Rightarrow E = \bigcup_{i\in I} E\setminus F_i$

$\Rightarrow E = \bigcup G_i$, G_i ανοιχτό

$\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$

$E = \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$

$\Rightarrow E^c = \bigcap_{k=1}^{n} (E\setminus G_{i_k})$

$\Rightarrow \varphi = \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}$

↯

"$\Longleftarrow$" με ανάλογο τρόπο H/W

(E,ρ) , $A \subseteq E$ συμπαγές $\Rightarrow$ A κλειστό και φραγμένο.

Το αντίστροφο ισχύει στον $\mathbb{R}^n$ (όχι όμως γενικά)

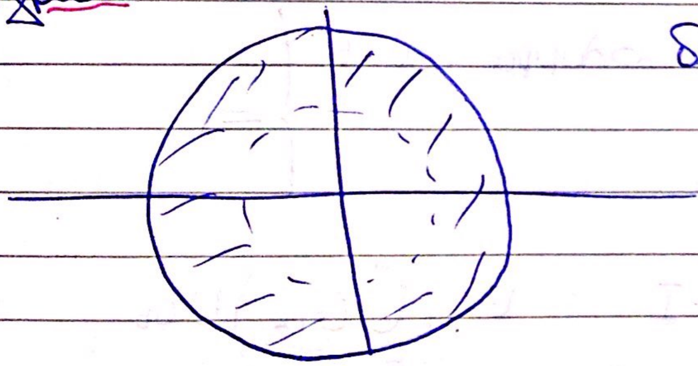
$\mathbb{R}^n$ κλειστό

A κλειστό , φραγμένο $\subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ A συμπαγές

Α.ν.δ.ο. A πλήρες και ολικά φραγμένο

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ πλήρης} \to A \text{ πλήρες} \\ \quad + \\ A \text{ ολικά φραγμένο} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ συμπαγές}$$

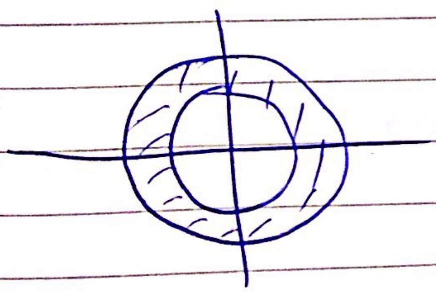
Παράδειγμα:



δακτύλιος

είναι φραγμένο αλλά δεν είναι κλειστό γιατί δεν περιέχει όλα τα σ.σ.

ενώ



κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow$ συμπαγές

(E,ρ) συμπαγής
$A \subseteq E$ τυχόν . Είναι το A συμπαγές;

Για να είναι θα έπρεπε κλειστό και φραγμ.

ΘΕΩΡΗΜΑ $\left.\begin{array}{l}(E,\rho) \text{ συμπαγής} \\ A \subseteq E \text{ κλειστό}\end{array}\right\} \Rightarrow A$ συμπαγές

Απόδειξη
Έστω $(G_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του A στο E.

$A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$, $G_i \subseteq E$ ανοιχτά

Ψάχνουμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

$\left.\begin{array}{l} G_0 = E - A \\ \{G_i, i\in I\} \cup \{G_0\} \text{ ανοιχτό κάλυμμα του } E \\ \\ (E,\rho) \text{ συμπαγής} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}, \exists i_1,\ldots,i_n \in I : E = \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}\right) \cup G_0$

$\Rightarrow E = \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}\right) \cup (E-A)$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$

$\Rightarrow A$ συμπαγές

ΘΕΩΡΗΜΑ $\left.\begin{array}{l} f:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2) \\ f \text{ συνεχής} \\ (E_1,\rho_1) \text{ συμπαγής}\end{array}\right\} \Rightarrow f(E_1)$ συμπαγές $\subseteq E_2$

ΔΗΛ. ΣΥΝΕΧΗΣ ΕΙΚΟΝΑ ΣΥΜΠΑΓΟΥΣ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΠΑΓΕΣ

Απόδειξη

Ένας τρόπος να τ'αποδείξουμε είναι η ακολουθιακή συμπάγεια

$y_n = f(x_n)$, $y_{n+1} \to y$

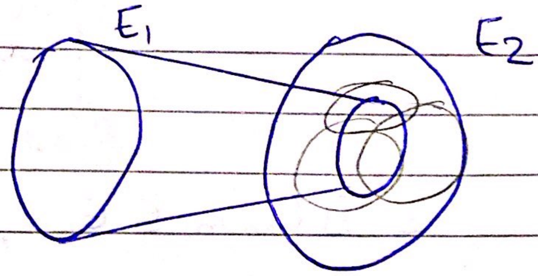
$\exists x_{k_n} \to x \in E_1$

$f(x_{n+1}) \to f(x) = y$

Αλλιώς μπορούμε να τ'αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Έστω $(G_i)_{i \in I}$ ανοιχτό κάλυμμα στον (E_2, ρ_2) του $f(E_1)$

$f(E_1) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$



άμεση συνεπαγωγή

$\Downarrow$

$E_1 \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$

γιατί: $x \in E_1 \Rightarrow f(x) \in f(E_1) \Rightarrow f(x) \in G_i \Rightarrow x \in f^{-1}(G_i)$

$$E_1 = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(G_{ik}) \Rightarrow f(E_1) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(G_{ik})\right)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{f\left(f^{-1}(G_{ik})\right)}_{\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{ik}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ $\left.\begin{array}{l} f:(E,\rho)\to(\mathbb{R},|\,|) \\ (E,\rho) \text{ συμπαγής} \\ f \text{ συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \max_E f,\ \min_E f$

$\left(\exists x_0 \in E : f(x) \le f(x_0)\ \forall x \in E\right)$

Απόδειξη

(E,ρ) συμπαγής

Εφόσον f συνεχής $\Rightarrow f(E)$ συμπαγής $\subseteq (\mathbb{R},|\,|)$

$\Rightarrow f(E)$ κλειστό και φραγμένο

δηλ. το $f(E)$ φράσσεται δηλ. δεν πάει στο άπειρο

Αφού $f(E)$ φραγμένο $\Rightarrow \exists \sup_E f = \sup\{f(x) : x \in E\} \in \mathbb{R}$

στόχος να το εκφράσουμε για κάποιο x_0

$f(x_0)$

$\Rightarrow \exists (x_n)_n \subseteq E,\ f(x_n) \to \sup_E f \in f(E)$

$f(E)$ κλειστό

$\Rightarrow \sup_E f = f(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in E$

ΠΡΟΤΑΣΗ $\left.\begin{array}{l} f:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2) \text{ συνεχής} \\ (E_1,\rho_1) \text{ συμπαγής} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη

$\forall x \in E_1$

f συνεχής στο x

Άρα αν ξεκινήσουμε με ένα $\varepsilon > 0$,

για τυχόν x, $\exists \delta_x > 0$

$\rho_1(y,x) < \delta_x \Rightarrow \rho_2(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\left[\, y \in B_{\rho_1}(x,\delta_x) \Rightarrow f(y) \in B_{\rho_2}\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]$

αντιστοιχία

$x \xrightarrow{f} \delta_x$ (από εδώ x περάσαμε στο δ_x)

$B_{\rho_1}\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) = G_x$ είναι ανοιχτό $\subseteq E_1$

$x \in E_1$

$\bigcup_{x \in E_1} G_x = E_1 \xRightarrow{E_1 \text{ συμπαγής}} E_1 = G_{x_1} \cup G_{x_2} \cup \dots \cup G_{x_n}$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in E_i$

$\Rightarrow E_1 = B_{\rho_1}\left(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}\right) \cup \dots \cup B_{\rho_1}\left(x_n, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right)$

Θέσαμε $\delta = \min\left\{ \frac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_n}}{2} \right\} > 0$ πεπερασμένο πλήθος

Ισχύει: $\forall x, y \in E : \rho_1(x,y) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

(ορισμός ομοιομ. συνέχειας)

διπλασιάσαμε την ακτίνα

$x, y \in E_1$

$x \in E_1 \Rightarrow \exists x_i : x \in B_{\rho_1}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \subseteq B_{\rho_1}(x_i, \delta_{x_i})$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \\ \text{Αν είχαμε επίσης ότι } \rho_2(f(y), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$

δηλ. αρκεί $y \in B(x_i, \delta_{x_i})$

$x \in B_{\rho_1}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$

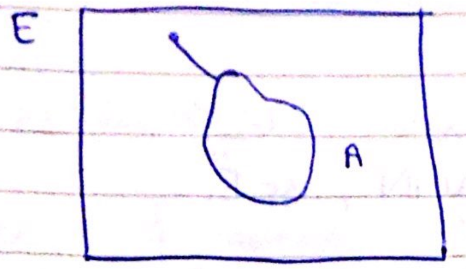
$\rho_1(x,y) < \delta < \frac{\delta_{x_i}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1(x, x_i) < \frac{\delta_x}{2} \\ \rho_1(y, x) < \frac{\delta_x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho_1(x_i, y) < \delta_{x_i} \Rightarrow y \in B_{\rho_1}(x_i, \delta_{x_i})$$

αυτό που θέλαμε

Είχαμε: $A \subseteq (E,\rho)$

$f(x) = \rho(x,A)$



Είχαμε αποδείξει σε προηγούμενα μαθήματα:

$$|\rho(x,A) - \rho(y,A)| \le \rho(x,y)$$

$$|f(x) - f(y)| \le 1 \cdot \rho(x,y)$$

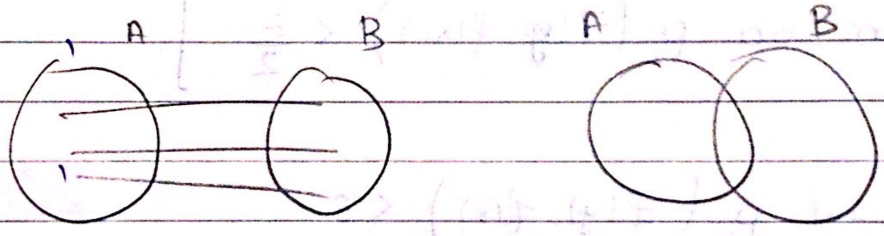
δηλ. αυτό μου λέει ότι είναι 1-Lipschitz

$$\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,z) : z \in A\}$$

Άσκηση: A συμπαγές $\subseteq (E,\rho)$, $B \subseteq E$ τυχαίο
$\Rightarrow \exists\, a \in A : \rho(A,B) = \rho(a,B)$

Λύση

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A,\ y \in B\}$$



εδώ: $\inf = 0$

$$= \inf\{\rho(x,B) : x \in A\}$$

$\exists\, (x_n)_n \subseteq A : \rho(x_n,B) \to \rho(A,B)$

$x_n \downarrow$

$A \ni a$

$\downarrow$

$\rho(a,B)$

A συμπαγές, ακολ. συμπαγές

$\exists (x_{k_n})_n$ υπακολουθία της (x_n)
και είναι $a \in A$ (A ακολ. συμπ.)

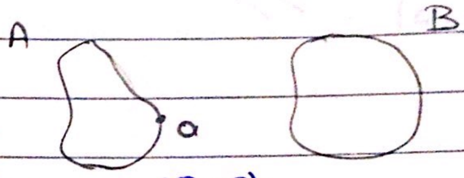
$x_{k_n} \to a$

$\rho(x_{k_n}, B) \to \rho(a, B)$?

$\downarrow$

$\rho(a, B)$ //

Άσκηση: $A \subseteq (E, \rho)$, A συμπαγές, B κλειστό, $A \cap B = \emptyset$
Ν.δ.ο. $\rho(A, B) > 0$



Λύση
A συμπαγές
$\exists a \in A$: $\rho(A, B) = \rho(a, B) > 0$

γιατί, αν $\rho(a, B) = 0 \Rightarrow \exists (x_n)_n \subset B : \rho(a, x_n) \to 0$
$\Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$
$\Rightarrow a \in \overline{B} = B$ (αφού B κλειστό)
$\Rightarrow a \in A \cap B = \emptyset$

↯

Άσκηση: $A \subseteq (E, \rho)$ συμπαγές $\Rightarrow \exists x_0, y_0 \in A$: $\delta(A) = \rho(x_0, y_0)$
Λύση
$\delta(A) = \sup\{\rho(x,y) : x \in A, y \in A\}$

$$\left.\begin{array}{l} \exists (x_n)_n \in A \\ (y_n)_n \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(x_n, y_n) \to \delta(A)$$

$x_{k_n} \to x_0$. $\qquad \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) \to \delta(A)$
$y_{k_n} \to y_0$ $\qquad \downarrow$ //
$\qquad \rho(x_0, y_0)$

Αυτό το πετυχαίναμε με τον παρακάτω τρόπο:

$(x_n)_n \in A$, A συμπαγές $\Rightarrow \exists\, x_{k_n} \to x_0 \in A$

$(y_{k_n})_n \in A$ $\boxed{x_{k_n} \to x_0}$

Ο.δ.ο. $y_{k_n} \to y_0 \in A$ $\boxed{y_{k_n} \to y_0}$.

$\underbrace{\rho(x_{k_n}, y_{k_n})}_{\delta(A)} \to \rho(x_0, y_0)$